CONTRÔLE CONTINU DE L'ANALYSE NUMÉRIQUE

Session de Printemps 2018-2019

Durée : 2H

EXERCICE 1 : (8pt)

On considère le système (E) : $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que le système (E) admet une solution unique. **(1pt)**

2) Donner la décomposition LU de la matrice A. **(1pt)**

3) En utilisant les matrices L et U, résoudre le système (E). **(1pt)**

4) Moyennant L et U, résoudre les système $Ac_i = e_i$, où e_i est le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. **(2pt)**

5) En déduire la matrice inverse A^{-1}, et retrouver encore par A^{-1} la solution de (E) obtenue dans la question (3). **(1pt)**

6) Sans calculer la matrice A^2, résoudre le système $A^2x = b$. **(2pt)**

EXERCICE 2 : (6pt)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$$

1) Montrer que f admet une seule racine. **(1pt)**

2) En utilisant la bissection sur l'intervalle [2, 3], combien d'itérations faut-t-il au moins pour atteindre une précision de 10^{-9}. **(1pt)**

3) on transforme l'équation $f(x) = 0$ en l'équation équivalente $x = g(x)$ où

$$g(x) = \frac{5}{x^2 - 2x}$$

Prouver que méthode de points fixes pour la fonction g ne converge pas. **(1pt)**

4) Proposer une autre fonction u pour laquelle on obtient la convergence. **(2pt)**

5) Donner l'ordre de convergence pour la fonction proposée dans la question précédente (4). **(1pt)**

EXERCICE 3 : (3pt)

On considère la matrice suivante

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 & \alpha \\ 0 & \frac{\alpha}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un nombre réel positif.

1) Donner une condition suffisante sur α pour que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent. ***(0.5pt)***

2) Déterminer la matrice de Jacobi $J(\alpha)$. ***(1pt)***

3) Donner une CNS sur α pour que la méthode de Jacobi converge. ***(1.5pt)***

EXERCICE 4 : (2pt)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0.$$

On considère le schéma itératif suivant de la méthode de points fixes qui, lorsqu'il converge, donne une approximation de la racine r de la fonction f

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Prouver que la méthode converge et donner l'ordre de convergence.

EXERCICE 5 : (1pt) CB

Donner la décomposition de Cholesky de la matrice suivante :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

$L_{22}^2 = -1$

BONNE CHANCE

Université Ibn Tofail
ENSA de Kénitra

ENSA KENITRA

Cycle Préparatoire
2ème année, Semestre 4

EXAMEN DE L'ANALYSE NUMÉRIQUE

Session de Printemps 2018-2019

Durée : 2H

Y. Taouil

EXERCICE 1 : (4pt)

Soit f une fonction de classe C^3 connue en les points

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 2 \quad et \quad f(2) = 4.$$

1) Donner le polynôme d'interpolation P de f en utilisant l'interpolation de Lagrange. **(1pt)**

2) Retrouver le même polynôme P en utilisant l'interpolation de Newton. **(1pt)**

3) On suppose que $\sup_{t\in[0,2]} |f^{(3)}(t)| = \frac{27\sqrt{3}}{12}$, et soit E l'erreur d'interpolation, montrer alors que $|E| \leq \frac{1}{4}$ sur $[0,2]$. **(1pt)**

4) On ajoute un quatrième point $f(3) = 1$, donner alors le polynôme d'interpolation de f. **(1pt)**

EXERCICE 2 : (2pt)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 2x^3 + 5x - 1.$$

En utilisant la méthode de Newton qui donne une approximation de la racine de f, calculer x_1 èt x_2 en prenant $x_0 = 0$.

EXERCICE 3 : (4pt)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$. Soit $I = \int_0^1 f(t)dt$. En choisissant un pas d'intégration $h = \frac{1}{5}$, donner une approximation de I par :

1) la méthode des rectangles à droite. **(1pt)**

2) la méthode des rectangles à gauche. **(1pt)**

3) la méthode des trapèzes. **(1pt)**

4) la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ en changeant le pas en $h = \frac{1}{4}$. **(1pt)**

EXERCICE 4 : (8.5pt)

*L'objectif est de développer une méthode d'intégration numérique d'une fonction g sur $[-1,1]$ qui soit exacte pour les polynômes ("**exacte**" signifie que l'erreur d'intégration est nulle). Cette méthode est donnée par la formule suivante*

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k g(x_k)$$

Le problème est le choix des points x_i dans $[-1,1]$ et la recherche des valeurs des coefficients α_k. Dans la suite, on admet que g est une fonction polynomiale de degré $2r-1$. La méthode est exacte pour les polynômes si et seulement si elle est exacte pour tout monôme (t^j) pour $0 \leq j \leq 2r-1$; c'est à dire :

$$\int_{-1}^{1} t^j dt = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k^j$$

- ***Le cas $r = 1$:***

1) Prouver alors que $\alpha_1 = 2$ et donner la valeur de x_1. ***(1pt)***

2) Reconnaitre cette méthode d'intégration. ***(0.5pt)***

- ***Le cas $r = 2$:***

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2)$$

3) Pour $0 \leq j \leq 2r-1$, donner $\int_{-1}^{1} t^j dt$ en fonction de α_1, α_2, x_1 et x_2. ***(2pt)***

4) Montrer que

$$\alpha_2 x_2 \left(x_2^2 - x_1^2\right) = 0$$

(1.5pt)

5) Montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ***(2pt)***

- ***Application :***

6) En utilisant cette méthode, calculer $\int_{-1}^{1} 4x^3 + 3x^2 + 2dx$. ***(1.5pt)***

EXERCICE 5 : (1.5pt)

Écrire un algorithme (ou programme en langage C ou MATLAB) qui permet d'intégrer la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 17$ par la méthode élaborée dans l'exercice 4.

BON COURAGE

EXAMEN DE RATTRAPAGE DE L'ANALYSE NUMÉRIQUE

Session de Printemps 2018-2019

Durée : 2H

Y. Taouil

EXERCICE 1 :

Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles le système $Ax = b$ admet une solution unique. Dans la suite, on prend $\alpha = 9$.

2) Trouver une matrice triangulaire supérieure U, inférieure L et une matrice P vérifiant $PA = LU$. Puis, donner P^{-1}.

3) En utilisant P, L et U, prouver que la solution de $Ax = b$ est $x = (-1, 1, 0)^t$.

4) En utilisant L, P et U, montrer que la matrice inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -5 & 12 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2 :

On considère la fonction $f(x) = 2x$. En prenant un pas d'intégration $h = \frac{1}{6}$, donner une approximation de $\int_0^1 f(t)dt$ en utilisant :

1) la méthode des rectangles à gauche.

2) la méthode des rectangles à droite.

3) la méthode des trapèzes.

4) la méthode de Simpson $\frac{3}{8}$.

EXERCICE 3 :

On considère la matrice S suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}$$

1) Prouver qu'il existe une matrice R à diagonale positive vérifiant $S = R^t R$.

2) En utilisant la matrice R, résoudre $Sx = b$ où $b = (9, 12, 24)^t$.

EXERCICE 4 :

1) Chercher a et b tels que la méthode

$$\int_{-2}^{2} f(t)dt = af(-1) + bf(1)$$

soit exacte pour tous les polynômes de degré ≤ 1.

2) On considère la méthode d'intégration suivante :

$$\int_{0}^{h} f(t)dt = \frac{h}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{h}{2}\right)\right)$$

a) Donner un développement limité de $f(t)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, puis intégrer et obtenir une nouvelle expression de $\int_0^h f(t)dt$.

b) Donner un développement limité de $f\left(\frac{h}{2}\right)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, puis obtenir une nouvelle expression de $\frac{h}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{h}{2}\right)\right)$.

c) En utilisant les deux expressions obtenues, donner une majoration de l'erreur d'intégration.

EXERCICE 5 :

1) Écrire un algorithme (ou programme en langage C ou MATLAB) qui permet de calculer la valeur exacte de $\int_{-2}^{2} 3x - 1 \, dx$ par la méthode élaborée dans la question 1 de l'exercice 4.

2) Écrire un algorithme (ou programme en langage C ou MATLAB) qui permet de donner une approximation de $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos(x) \, dx$ par la méthode élaborée dans la question 2 de l'exercice 4.

BON COURAGE